Ćwiczenia

1. Udowodnij, że aksjomat indukcji i twierdzenia 1.1, 1.2 oraz 1.3 są równoważne.

2. Znajdź błąd w dowodzie następującego „twierdzenia”: *Wszystkie koty są jednakowego koloru.*

Dowód
Wystarczy pokazać, że spełniony jest następujący warunek: *Dla każdego* $n \in \mathbb{N}$ *w dowolnym zbiorze złożonym z* n *kotów wszystkie koty są jednakowego koloru.*

Dla $n = 1$ warunek oczywiście zachodzi. Załóżmy, że warunek zachodzi dla n. Pokażemy, że zachodzi dla $n + 1$.
W zbiorze złożonym z $n+1$ kotów, zgodnie z założeniem indukcyjnym, n kotów ma ten sam kolor, na przykład czarny:

Ale z założenia indukcyjnego koty $k_2, \ldots, k_{n+1}$ są też jednakowego koloru. Ponieważ koty $k_2, \ldots, k_n$ są czarne, więc kot k_{n+1} jest też czarny.

3. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczba $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ jest wielokrotnością liczby 13.

4. Niech $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geqslant k$. Przez $\binom{n}{k}$ oznaczamy liczbę $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Sprawdź, że $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ $(0! = 1)$.

5. Niech $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \geqslant k$. Sprawdź, że $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

6. Wykaż, że dla każdego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zachodzi następująca równość:
$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7. Dla $n, r \in \mathbb{N}$ oznaczmy przez $S_r(n)$ sumę $1^r + 2^r + \ldots + n^r$. Sprawdź, że dla każdych n, r:
$$(n+1)^{r+1} - (n+1) = \binom{r+1}{1} S_r(n) + \binom{r+1}{2} S_{r-1}(n) + \ldots + \binom{r+1}{r} S_1(n).$$

8. Wyprowadź wzory na $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$, $S_4(n)$. Udowodnij ich prawdziwość, stosując metodę indukcji matematycznej.

9. Udowodnij, że maksymalna liczba jednomianów (które nie są podobne) wielomianu n zmiennych stopnia d jest równa $\binom{n+d}{n}$.

2 Algorytm Euklidesa

Dzielenie liczb całkowitych, pojęcia podzielności, dzielnika, wielokrotności pojawiają się już w szkole podstawowej. Zasada dzielenia z resztą opiera się na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 2.1 (**o dzieleniu z resztą**)
Dla dowolnych liczb całkowitych a oraz b, $b \neq 0$, istnieją jednoznacznie określone liczby całkowite q, r takie, że $a = qb + r \quad i \quad 0 \leqslant r < |b|$. Liczbę q nazywamy ***ilorazem****, liczbę r* ***resztą****.*

Dowód
Niech $S = \{a - qb : q \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Oznaczamy przez r najmniejszą liczbę zbioru S. Oczywiście zachodzą nierówności $0 \leqslant r < |b|$. Dla wykazania jednoznaczności załóżmy, że $a = q_1 b + r_1 = q_2 b + r_2$, gdzie $0 \leqslant r_1, r_2 < |b|$. Otrzymujemy stąd, że $|(q_1 - q_2) \cdot b| = |r_1 - r_2| < |b|$, zatem $q_1 = q_2$ i $r_1 = r_2$. $\square$

Przykład 2.2
Kwadrat każdej liczby całkowitej nieparzystej jest postaci $8k + 1$.
Na mocy twierdzenia o dzieleniu z resztą, każda liczba całkowita ma jedną z postaci $4q + 0$, $4q + 1$, $4q + 2$, $4q + 3$. Liczby nieparzyste zapisujemy w postaci $4q + 1$ lub $4q + 3$, stąd ich kwadraty są postaci $(4q + 1)^2 = 16q^2 + 8q + 1 = 8(2q^2 + q) + 1$ lub $(4q + 3)^2 = 16q^2 + 24q + 9 = 8(2q^2 + 3q + 1) + 1$.

Definicja 2.3
Mówimy, że **liczba całkowita b jest podzielna przez liczbę całkowitą a**, jeśli istnieje taka liczba całkowita c, że $b = a \cdot c$. Liczbę a nazywamy **dzielnikiem** liczby b, o liczbie b mówi się, że jest **wielokrotnością** liczby a.

Jeśli b jest podzielne przez a (inaczej mówiąc, a dzieli b), to używamy oznaczenia $a \,|\, b$, natomiast w przeciwnym razie stosować będziemy oznaczenie $a \nmid b$.

Zauważmy, że aby znaleźć wszystkie dzielniki danej liczby, wystarczy znaleźć jej dzielniki dodatnie, jeśli bowiem $a \,|\, b$, to także $-a \,|\, b$.

Uwaga 2.4
Relacja podzielności w zbiorze $\mathbb{Z}$ ma następujące własności:
(1) $a \,|\, b \wedge c \,|\, d \;\Rightarrow\; ac \,|\, bd$,
(2) $a \,|\, b \wedge a \,|\, c \;\Rightarrow\; a \,|\, bx + cy$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{Z}$,
(3) $a \,|\, b \wedge b \,|\, a \;\Rightarrow\; a = b$ lub $a = -b$.